ENSAIT
Ecole Nationale Supérieure des
Arts et Industries Textiles

CONCOURS D'ENTREE A - 1998

EPREUVE de MATHEMATIQUES I

Durée 2 heures

(tous les candidats)

Les théorèmes seront énoncés avec rigueur

Aucun résultat ne sera pris en compte s'il n'est accompagné de calculs intermédiaires

Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées

L'usage des calculatrices est interdit

I

On désigne par (E_0) l'équation différentielle suivante :

(E_0) $\quad t\,y''(t)+y'(t)+t\,y(t)=0$

1.1 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série entière de terme général $a_n t^n$ ait un rayon de convergence non nul.

Soit la fonction $y_0 : t \to y_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$; $y_0(0)=1$

1.1.1 Déterminer a_n pour que y_0 soit solution de (E_0).

1.1.2 Préciser le domaine de définition de y_0.

1.1.3 Donner la valeur de $y'_0(0)$.

1.2 Soit J_o la fonction définie sur l'ensemble des réels par

$$J_0 : t \to J_0(t)=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\ \sin\ \theta)\,d\theta$$

1.2.1 Démontrer que J_0 est de classe $\mathcal{C}^2$

1.2.2 Etablir que J_0 est solution de (E_0)

1.3 Etude des zéros de J_0 pour $t\rangle 0$

1.3.1 Soit $v(t)$ une solution quelconque non nulle de l'équation différentielle $v''(t)+v(t)=0$. Montrer que $v(t)$ admet une infinité de zéros positifs.

1.3.2 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction $u(t)=\sqrt{t}\ J_0(t)$ pour $t\rangle 0$.

1.3.3 Montrer que, pour tout $t\rangle 0$, on a :

$$u''(t)\ v(t)-u(t)\ v''(t)+\frac{u(t)\ v(t)}{4\ t^2}=0$$

1.3.4 Soit α_k et α_{k+1} deux zéros consécutifs de v avec $\alpha_k\langle\alpha_{k+1}$
Démontrer que $v'(\alpha_k)$ et $v'(\alpha_{k+1})$ sont de signe contraire.
Etablir la relation (R)

$$(R):\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}\frac{u(x)\ v(x)}{4x^2}\ dx=u(\alpha_{k+1})\ v'(\alpha_{k+1})-u(\alpha_k)\ v'(\alpha_k)$$

1.3.5 En utilisant (R), établir que u s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[\alpha_k;\alpha_{k+1}]$ (Indication : on pourra faire un raisonnement par l'absurde en supposant que u garde un signe constant sur l'intervalle et en établissant qu'il y a contradiction entre les signes des deux membres de (R))

1.3.6 En déduire que $J_0(t)$ admet une infinité de zéros positifs.

II

Soit n un entier relatif et J_n la fonction définie sur l'ensemble des réels par

$$J_n:\ t\to J_n(t)=\tfrac{1}{\pi}\int_o^{\pi}\cos\left(t\ \sin(\theta)-n\theta\right)\ d\theta$$

2.1

2.1.1 Démontrer que J_n est de classe $\mathcal{C}^1$.

2.1.2 Démontrer que $J_{-n}(t)=(-1)^n J_n(t)$.

2.1.3 Calculer $J_{n+1}(t) - J_{n-1}(t)$ en fonction de $J'_n(t)$.

2.1.4 Calculer $t\left[J_{n+1}(t) + J_{n-1}(t)\right]$ en fonction de n et $J_n(t)$.

2.1.5 En déduire une relation entre $J'_0(t)$ et $J_1(t)$

2.2 Etant donnée une fonction f de la variable θ ,2π - périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur l'ensemble des réels, f est développable en série de Fourier sous la forme :

$$f(\theta) = \tfrac{1}{2}\ a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(f)\ \cos\ n\theta + b_n(f)\ \sin\ n\theta\right)$$

t étant un nombre réel, on considère les fonctions g et h définies par :

$$g\ :\ \theta \to g(\theta) = \cos\left(t\ \sin\theta\right)$$
$$h\ :\ \theta \to h(\theta) = \sin\left(t\ \sin\theta\right)$$

2.2.1 Donner la valeur de $b_n(g)$.Calculer $a_n(g)$ en fonction de J_n et en déduire le développement en série de Fourier de g.

2.2.2 Donner la valeur de $a_0(h), a_n(h)$.Calculer $b_n(h)$ en fonction de J_n et en déduire le développement en série de Fourier de h.

2.2.3 Calculer $S = J_0^{\,2}(t) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k^{\,2}(t)$ et en déduire que pour tout t,

$$\left|J_0(t)\right| \le 1$$
$$\left|J_k(t)\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad k \ge 1$$